

MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 5.

1. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; b) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x}}$ c) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

2. Ukažte, že funkce $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí, tedy prostá na $\mathbb{R}$ a najděte k funkci f na $\mathbb{R}$ funkci inverzní.

3. Zkuste načrtnout grafy funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ a $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$; b) $h(x) = \exp(-|x|)$; c) $k(x) = |\ln|x||$.

4. Z definice limity ukažte:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = 5$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ nebo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0$.

5. Ukažte, že neexistují limity (vyberte si aspoň jednu)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nebo b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin x$ nebo c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nebo d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x)$.

6. Vypočítejte následující jednoduché limity funkce (užití aritmetiky limit, věty o limitě složené funkce,

věty o „dvou strážnících“, základních limit a limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), nebo ukažte, že funkce limitu a daném bodě nemají:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 1}{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$.

7. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f ,

kteřá je pro $x \neq 0$ dána předpisem $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.